OVERSIGT OVER DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS
FORHANDLINGER. 1910. N° 1.

SUR LES FRACTIONS CONTINUES D'INTERPOLATION

PAR

N.-E. NÖRLUND

§ 1. Le problème général d'interpolation consiste à trouver une formule permettant de calculer la valeur d'une fonction pour toutes les valeurs de la variable dans un certain domaine, quand on connaît seulement ce que devient cette fonction et quelques-unes de ses dérivées pour une série de valeurs particulières de la variable dans ce domaine. La formule d'interpolation de Newton donne, suivant l'expression de C.-F. Gauss, la solution la plus simple de ce problème; mais si la fonction, dans le domaine où elle doit être interpolée, présente des pôles simples ou multiples, la formule de Newton ne donnera pas une approximation suffisante. On peut, dans ce cas, avoir recours aux fractions continues en appliquant la méthode d'interpolation inventée par M. T.-N. Thiele[1]. Il sera alors d'importance de pouvoir, dans tous les cas, s'assurer de l'approximation qu'on a obtenue. Pour faciliter cela nous allons dans les pages suivantes indiquer quelques expressions simples du terme reste de la fraction continue d'interpolation.

Mais le premier problème qui s'impose est le calcul effectif des différences réciproques. Il est souvent avantageux de faire un petit détour en calculant d'abord les valeurs des déterminants par lesquels s'expriment les différences réciproques;

[1] T.-N. Thiele: Différences réciproques. Bulletin de l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark. 1906, pag. 153—171.

T.-N. Thiele: Interpolationsrechnung. Leipzig. 1909, pag. 129—143.

ce calcul s'effectue le plus aisément à l'aide d'une formule de récursion que nous allons indiquer. Pour le cas limite où tous les arguments tendent vers la même valeur, cette formule a déjà été indiquée par M. T.-N. Thiele.

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe à l'intérieur d'un domaine E; soit Γ un contour tel que toute la région du plan non extérieur à Γ soit dans l'intérieur de E; on aura pour tout point x de cette région

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-x}\, dz. \tag{1}$$

Désignons par $\overset{n}{\delta}(0,1,\dots n)$ la différence divisée d'ordre n de $f(x)$. C'est une fonction symétrique des $n+1$ arguments $\beta_0, \beta_1, \dots \beta_n$ qui sont supposés être des nombres quelconques[1] situés dans E; on aura:

$$\overset{n}{\delta}(0,1,\dots n) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)\,dz}{(z-\beta_0)(z-\beta_1)\dots(z-\beta_n)}. \tag{2}$$

Considérons maintenant le déterminant

$$\Pi_{r,0} = 1$$

$$\underset{r,n+1}{\Pi}(-n,-n+1,\dots n+r) = \begin{vmatrix} \overset{r}{\delta}(0,1,\dots r) & \overset{r+1}{\delta}(-1,0,\dots,r) & \dots & \overset{r+n}{\delta}(-n,-n+1,\dots r) \\ \overset{r+1}{\delta}(0,1,\dots r+1) & \overset{r+2}{\delta}(-1,0,\dots r+1) & \dots & \overset{r+n+1}{\delta}(-n,-n+1,\dots r+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overset{r+n}{\delta}(0,1,\dots r+n) & \overset{r+n+1}{\delta}(-1,0,\dots r+n) & \dots & \overset{r+2n}{\delta}(-n,-n+1,\dots r+n) \end{vmatrix} \quad n \geqq 0 \tag{3}$$

formé des différences divisées de $f(x)$ et remarquons que tous les éléments se trouvent dans un tableau ordinaire des différences divisées de $f(x)$.

Je dis que $\Pi_{r,n+1}$ est une fonction symétrique des arguments β_i. Pour démontrer cela il faut transformer le déterminant de la manière suivante. A la prémière colonne on ajoute la deuxième multipliée par β_{-1}, à la deuxième colonne on

[1] Les β_i ne sont donc pas nécessairement tous différents.

ajoute la troisième multipliée par β_{-2} etc. . . ., et on continue ainsi jusqu'à ce que tous les éléments de la même ligne soient des différences divisées du même ordre. En se rappelant l'identité

$$\delta^n(xf(x)) = \delta^{n-1}(f(x)) + \beta_n\delta^n(f(x))$$

on voit que le déterminant prendra alors la forme suivante

$$\Pi_{r,n+1}(-n,-n+1,\dots n+r) = \begin{vmatrix} \overset{r+n}{\delta}(x^n f(x)) & \overset{r+n}{\delta}(x^{n-1}f(x)) & \dots & \overset{r+n}{\delta}(f(x)) \\ \overset{r+n+1}{\delta}(x^n f(x)) & \overset{r+n+1}{\delta}(x^{n-1}f(x)) & \dots & \overset{r+n+1}{\delta}(f(x)) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overset{r+2n}{\delta}(x^n f(x)) & \overset{r+2n}{\delta}(x^{n-1}f(x)) & \dots & \overset{r+2n}{\delta}(f(x)) \end{vmatrix} \qquad (4)$$

où $\delta^{n+i}(x^n f(x))$ désigne la différence divisée d'ordre $n+i$ de la fonction $x^n f(x)$ avec les arguments $\beta_{-n} \dots \beta_i$.

En effectuant les mêmes opérations sur les lignes de ce déterminant on trouve

$$\Pi_{r,n+1}(-n,-n+1,\dots n+r) = \begin{vmatrix} \overset{r+2n}{\delta}(x^{2n}f(x)) & \overset{r+2n}{\delta}(x^{2n-1}f(x)) & \dots & \overset{r+2n}{\delta}(x^n f(x)) \\ \overset{r+2n}{\delta}(x^{2n-1}f(x)) & \overset{r+2n}{\delta}(x^{2n-2}f(x)) & \dots & \overset{r+2n}{\delta}(x^{n-1}f(x)) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overset{r+2n}{\delta}(x^n f(x)) & \overset{r+2n}{\delta}(x^{n-1}f(x)) & \dots & \overset{r+2n}{\delta}(f(x)) \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

Mais dans ce dernier déterminant, tous les éléments sont des fonctions symétriques des arguments β_i. Cela posé, nous pouvons trouver une équation aux différences par laquelle on peut, successivement, calculer tous les $\Pi_{r,n}$.

Soit donnée une matrice contenant m colonnes et $m+2$ lignes et désignons par $(s_1, s_2, \dots s_m)$ le déterminant formé des $s_1$ième, $s_2$ième, … $s_m$ième lignes, on a, d'après une formule due à M. VAHLEN[1], la relation suivante

$$\left.\begin{aligned} &(1,2,\dots i-1, m+1, i+1, \dots j-1, m+2, j+1, \dots m)\,(1,2,\dots m) = \\ &= (1,2,\dots i-1, m+1, i+1, \dots m)\,(1,2,\dots j-1, m+2, j+1, \dots m) \\ &- (1,2,\dots i-1, m+2, i+1, \dots m)\,(1,2,\dots j-1, m+1, j+1, \dots m) \end{aligned}\right\}. \qquad (6)$$

[1] E. PASCAL: Die Determinanten. Leipzig 1900, pag. 119.

Considérons maintenant la matrice formée des $n+1$ lignes dans le déterminant (3) et des deux lignes suivantes

$$1, 0, 0, \ldots\ 0$$
$$0, 0, 0, \ldots\ 1$$

et posons dans (6) $i = 1$ $j = m = n+1$, on trouve,

$$\underset{r,\,n+1}{\Pi}(-n, -n+1, \ldots n+r)\ \underset{r+2,\,n-1}{\Pi}(-n+1, \ldots r+n-1) =$$
$$\underset{r,\,n}{\Pi}(-n+1, \ldots r+n-1)\ \underset{r+2,\,n}{\Pi}(-n, \ldots r+n) - \underset{r+1,\,n}{\Pi}(-n+1, \ldots r+n)\ \underset{r+1,\,n}{\Pi}(-n, \ldots r+n-1), \quad (7)$$

ce qui est justement la formule que j'avais en vue. On peut trouver encore une autre formule de récursion qui nous sera utile. Considérons la matrice formée des lignes du déterminant (3) en y joignant les deux lignes suivantes

$$\overset{r+n+1}{\delta}(0, 1, \ldots r+n+1),\ \overset{r+n+2}{\delta}(-1, 0, \ldots r+n+1)\ \ldots\ \overset{r+2n+1}{\delta}(-n, \ldots r+n+1)$$
$$1 \quad , \quad 0 \quad \ldots \quad 0$$

et désignons par $\Pi^{(1)}_{r,\,n+1}$ ce que devient le déterminant (3) quant on écrit dans la dernière ligne $r+1$ au lieu de r; la formule de M. Vahlen donne alors la relation suivante

$$\Pi_{r+1,\,n}\ \Pi_{r+1,\,n+1} = \Pi^{(1)}_{r,\,n+1}\ \Pi_{r+2,\,n} - \Pi^{(1)}_{r+2,\,n}\ \Pi_{r,\,n+1}\,, \quad (7\text{ bis})$$

où nous nous sommes dispensé d'écrire explicitement les arguments. Dans le cas limite, où tous les arguments β_i tendent vers la même valeur x, la formule peut s'ecrire

$$(r+2n+1)\,\Pi_{r+1,\,n}\cdot\Pi_{r+1,\,n+1} = \Pi_{r+2,\,n}\cdot\frac{d\,\Pi_{r,\,n+1}}{dx} - \Pi_{r,\,n+1}\cdot\frac{d\,\Pi_{r+2,\,n}}{dx}.$$

Dans le cas général, où les β_i sont des nombres quelconques, (7 bis) peut encore s'écrire sous la forme suivante

$$\left.\begin{aligned}&\underset{r+1,\,n+1}{\Pi}(-n-1, -n \ldots r+n)\cdot\underset{r+1,\,n}{\Pi}(-n, \ldots r+n-1)\,(\beta_{r+n} - \beta_{-n-1}) = \\ &\underset{r,\,n+1}{\Pi}(-n, \ldots r+n)\cdot\underset{r+2,\,n}{\Pi}(-n-1, \ldots r+n-1) - \underset{r,\,n+1}{\Pi}(-n-1, \ldots r+n-1)\cdot\underset{r+2,\,n}{\Pi}(-n, \ldots r+n).\end{aligned}\right\}(7\text{ ter})$$

En effet, si au deuxième membre de cette équation on ajoute et soustrait

$$\underset{r,\,n+1}{\Pi}(-n, -n+1, \ldots r+n)\cdot\underset{r+2,\,n}{\Pi}(-n, -n+1, \ldots r+n)\,,$$

on arrivera justement à la formule (7 bis).

En désignant la différence réciproque d'ordre n de $f(x)$ par $\rho^n f(x)$ je dis maintenant qu'on a

$$\rho^{2n} f(x) = \frac{\underset{0,\, n+1}{\Pi}(-n, -n+1, \ldots + n)}{\underset{2,\, n}{\Pi}(-n, -n+1, \ldots + n)} \tag{8}$$

$$\rho^{2n+1} f(x) = \frac{\underset{3,\, n}{\Pi}(-n, -n+1, \ldots + n+1)}{\underset{1,\, n+1}{\Pi}(-n, -n+1, \ldots + n+1)}. \tag{8 bis}$$

Par la formule (7 ter) on en dérive encore

$$\rho\rho^{2n} f(x) = \frac{\underset{2,\, n}{\Pi}(-n, \ldots + n) \, \underset{2,\, n}{\Pi}(-n-1, \ldots + n-1)}{\underset{1,\, n+1}{\Pi}(-n-1, \ldots + n) \, \underset{1,\, n}{\Pi}(-n, \ldots + n-1)}, \tag{9}$$

$$\rho\rho^{2n+1} f(x) = -\frac{\underset{1,\, n+1}{\Pi}(-n, \ldots + n+1) \, \underset{1,\, n+1}{\Pi}(-n-1, \ldots + n)}{\underset{2,\, n+1}{\Pi}(-n-1, \ldots + n+1) \, \underset{2,\, n}{\Pi}(-n, \ldots + n)}. \tag{9 bis}$$

Cela posé, les formules générales (8) et (8 bis) se démontrent par voie d'induction. En effet, elles sont correctes pour $\rho^0 f(x) = f(x)$ et pour $\rho^1 f(x) = 1 : \delta f(x)$; supposons donc qu'elles soient vraies pour un certain n, en combinant (7) avec la formule

$$\rho^{n+1} f(x) = \rho^{n-1} f(x) + \rho\rho^n f(x), \tag{10}$$

on s'assure qu'elles restent vraies encore pour $n+1$.

§ 2. En substituant dans le déterminant (3) $\delta f(x)$ à $f(x)$ on voit que

$$\Pi_{r,\, n}(\delta f(x)) = \Pi_{r+1,\, n}(f(x)). \tag{11}$$

En rapprochant cette formule à (8) on trouve la relation remarquable

$$\rho^{2n} \delta f(x) = \frac{1}{\rho^{2n+1} f(x)}. \tag{12}$$

La différence réciproque d'ordre $2n$ de la fonction $\dfrac{f(x) - f(\beta_{n+1})}{x - \beta_{n+1}}$ prise pour les arguments $\beta_{-n}, \ldots \beta_n$ est égale à la valeur réciproque de la différence réciproque d'ordre $2n+1$ de $f(x)$ prise pour les arguments $\beta_{-n} \ldots \beta_{n+1}$.

La relation de récurrence (10) nous donne encore ces deux autres formules

$$\rho\rho^{2n+1}\,\delta f(x) = -\frac{\rho\rho^{2n+2} f(x)}{\rho^{2n+1} f(x)\cdot\rho^{2n+3} f(x)}, \tag{13}$$

$$\rho\rho^{2n}\,\delta f(x) = -\rho^{2n+1} f(x)\cdot\rho^{2n+1} f(x)\cdot\rho\rho^{2n+1} f(x). \tag{14}$$

Il est intéressant de comparer les formules (12), (13) et (14) aux formules suivantes que j'ai démontrées à une autre occasion [1]

$$\rho^{2n}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{1}{\rho^{2n} f(x)}, \tag{12 bis}$$

$$\rho\rho^{2n+1}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = -\frac{\rho\rho^{2n+1} f(x)}{\rho^{2n} f(x)\,\rho^{2n+2} f(x)}, \tag{13 bis}$$

$$\rho\rho^{2n}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = -\rho^{2n} f(x)\cdot\rho^{2n} f(x)\cdot\rho\rho^{2n} f(x); \tag{14 bis}$$

dans (14) et (14 bis) le premier terme au deuxième membre est égal à $\rho^{2n+1}(\beta_{-n-1}, \beta_{-n}, \dots \beta_n)$ et $\rho^{2n}(\beta_{-n-1}\,\beta_{-n}, \dots \beta_{n-1})$ respectivement, tandis que partout ailleurs

$$\rho^{2n} = \rho^{2n}(\beta_{-n}, \beta_{-n+1}, \dots \beta_n) \text{ et } \rho^{2n+1} = \rho^{2n+1}(\beta_{-n}, \beta_{-n+1}, \dots \beta_{n+1}).$$

Dans la fraction continue d'interpolation de M. T.-N. Thiele

$$f(x) = f(\beta_0) + \cfrac{x-\beta_0}{a_1 - \cfrac{x-\beta_1}{a_2 - \cfrac{x-\beta_2}{\ddots \, - \cfrac{x-\beta_n}{a_n}}}} \tag{15}$$

On a maintenant

$$a_i = (-1)^i \rho\rho^i(\beta_0, \beta_1, \dots \beta_{i+1}) \qquad i < n$$

$$a_n = \rho^{n+1}(\beta_0 \dots \beta_n, x) - \rho^{n-1}(\beta_0 \dots \beta_{n-1}),$$

mais, pourvu que n soit un nombre pair, on trouve pour le terme reste

$$\mathfrak{R}_{n+1}(x) = \rho^{n+1}(\beta_0 \dots \beta_n, x)$$

d'après ce qui précède l'expression suivante

[1] Fractions continues et différences réciproques. Acta mathematica t. 34, pag. 72—73.

$$\frac{1}{\Re_{2n+1}(x)} = \rho^{2n}\left(\frac{f(x)-f(\beta_0)}{x-\beta_0}\right). \tag{16}$$

Cette formule est à comparer à l'expression suivante du terme reste de la formule d'interpolation de Newton indiqué par M. J.-L.-W.-V. Jensen[1]

$$R_n(x) = (x-\beta_0)(x-\beta_1)\ldots(x-\beta_n)\,\delta^n\left(\frac{f(x)-f(\beta_0)}{x-\beta_0}\right). \tag{16 bis}$$

Tout ce que nous avons dit plus haut reste vrai si quelquesuns ou tous les β_i tendent vers la même valeur. En particulier, la formule (16) reste donc également valable, aussi bien que celui de M. J.-L.-W.-V. Jensen.

§ 3. Substituons maintenant dans le déterminant (5) aux différences divisées leurs expressions intégrales (2) et appelons z_n la variable d'intégration dans les éléments de la $n^{\text{ième}}$ ligne, on trouve alors l'intégrale multiple

$$\underset{r,\,n+1}{\Pi}(-n, 1-n, \ldots r+n) =$$

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z_1)}{\psi_{r+2n}(z_1)} \cdot \frac{f(z_2)}{\psi_{r+2n}(z_2)} \cdots \frac{f(z_{n+1})}{\psi_{r+2n}(z_{n+1})} \cdot \frac{D}{(2\pi i)^{n+1}} \cdot dz_1 dz_2 \ldots dz_{n+1},$$

où nous avons posé

$$\psi_{r+2n}(z) = (z-\beta_{-n})(z-\beta_{1-n})\ldots(z-\beta_{n+r})$$

$$D = \begin{vmatrix} z_1^{2n} & z_1^{2n-1} & \ldots & z_1^{n} \\ z_2^{2n-1} & z_2^{2n-2} & \ldots & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_{n+1}^{n} & z_{n+1}^{n-1} & \ldots & z_{n+1}^{0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1^{n} & z_1^{n-1} & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_{n+1}^{n} & z_{n+1}^{n-1} & \ldots & 1 \end{vmatrix} z_1^{n} z_2^{n-1} \ldots z_n\, z_{n+1}^{0}.$$

En permutant les z_i de toutes manières possibles et en ajoutant toutes les intégrales ainsi obtenues, on trouve la formule définitive

[1] J.-L.-W.-V. Jensen: Sur une expression simple du reste dans la formule d'interpolation de Newton. Bulletin de l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark. 1894, pag. 251.

$$\underset{r,\, n+1}{\Pi}(-n, 1-n, \ldots r+n) =$$

$$\frac{1}{(n+1)!}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(z_1)\,dz_1}{\psi_{r+2n}(z_1)}\,\frac{f(z_2)\,dz_2}{\psi_{r+2n}(z_2)}\cdots\frac{f(z_{n+1})\,dz_{n+1}}{\psi_{r+2n}(z_{n+1})}\,\frac{\Delta^2}{(2\pi i)^{n+1}}, \tag{17}$$

ou Δ^2 est le discriminant de $z_1 z_2 \ldots z_{n+1}$, c'est à dire le carré du produit de toutes les différences entre les z_i.

Cette expression intégrale reste valable même si les β_i tendent tous vers la même limite. Elle pourra être très utile dans l'étude de la convergence d'une certaine classe de fractions continues, comme nous allons le démontrer à une autre occasion. Ici nous nous bornerons à indiquer encore quelques autres expressions du terme reste de la fraction continue (15), remarquables, surtout, par l'analogie qu'elles présentent avec des expressions bien connues du reste dans la formule d'interpolation de Newton et la formule de Taylor.

§ 4. Soient A et B deux nombres réels et supposons que, dans l'intervalle (AB) auquel appartiennent les nombres $\beta_0, \beta_1 \ldots \beta_p$ la fonction $f(x)$ admette des dérivées continues et bien déterminées jusqu'à l'ordre $n = a_0 + a_1 + \ldots a_p$ inclusivement, en exceptant seulement un nombre fini de points $a_1\, a_2 \ldots a_s$ qui sont des pôles et que nous supposons différents des β_i. Construisons maintenant une fraction rationnelle qui prenne, elle et ses $a_i - 1$ premières dérivées pour $x = \beta_i$ $(i = 0, 1, \ldots p)$, les mêmes valeurs respectives que la fonction $f(x)$ et ses $a_i - 1$ premières dérivées. La $n^{\text{ième}}$ réduite $\dfrac{T_n(x)}{N_n(x)}$ de (15) est par définition justement une telle fraction, si nous prenons pour arguments les nombres $\beta_i (i = 0, 1, 2, \ldots p)$ chacun répété a_i fois. Les degrés des polynômes $T_n(x)$ et $N_n(x)$ sont m et $m-1$ respectivement si $n = 2m$; si au contraire $n = 2m+1$, les degrés du numérateur et du dénominateur sont tous deux égaux à m.

Soit x un nombre, appartenant à l'intervalle AB, pour lequel nous voulons interpoler la fonction $f(x)$ et soit $\varphi_n(x)$ un polynôme arbitraire du même degré que $N_n(x)$ nous déterminons le constante A de façon à satisfaire à l'équation

$$f(x) - \frac{T_n(x)}{N_n(x)} = A \cdot \frac{(x-\beta_0)^{\alpha_0}(x-\beta_1)^{\alpha_1}\dots(x-\beta_p)^{\alpha_p}}{N_n(x)\,\varphi_n(x)}.$$

Posons

$$F(t) = f(t) - \frac{T_n(t)}{N_n(t)} - A \cdot \frac{(t-\beta_0)^{\alpha_0}(t-\beta_1)^{\alpha_1}\dots(t-\beta_p)^{\alpha_p}}{N_n(t)\,\varphi_n(t)}. \quad (18)$$

Disposons maintenant du polynôme $\varphi_n(t)$ de manière que $f(t)\varphi_n(t)$ reste finie dans l'intervalle (AB) et multiplions l'équation (18) par $N_n(t)\,\varphi_n(t)$. On trouve alors en différentiant n fois par rapport à t

$$D_t^n\left\{F(t)\,N_n(t)\,\varphi_n(t)\right\} = D_t^n\left\{f(t)\,N_n(t)\,\varphi_n(t)\right\} - A \cdot n!$$

$F(t)$ est zéro ainsi que ses $\alpha_i - 1$ premières dérivées pour $t = \beta_i$, puisqu'il en est ainsi de $f(t) - \frac{T_n(t)}{N_n(t)}$ par hypothèse et du dernier terme en vertu de sa forme; elle est encore zéro pour $t = x$. D'après le théorème généralisé de Rolle[1], il existe alors au moins une quantité x' intermédiaire à la plus grande et à la plus petite des valeurs $\beta_0, \beta_1, \dots \beta_p, x$, pour laquelle on a

$$D_{x'}^n\left\{F(x')\,N_n(x')\,\varphi_n(x')\right\} = D_{x'}^n\left\{f(x')\,N_n(x')\,\varphi_n(x')\right\} - A \cdot n! = 0.$$

En déterminant A de cette équation et en posant

$$R_n(x) = f(x) - \frac{T_n(x)}{N_n(x)},$$

on trouve pour le terme reste $R_n(x)$ l'expression suivante

$$R_n(x) = \frac{(x-\beta_0)^{\alpha_0}(x-\beta_1)^{\alpha_1}\dots(x-\beta_p)^{\alpha_p}}{N_n(x)\,\varphi_n(x)} \, \frac{D_{x'}^n\left\{f(x')\,N_n(x')\,\varphi_n(x')\right\}}{n!}. \quad (19)$$

[1] Voir J. Tannery: Introduction à la théorie des fonctions d'une variable. Paris 1904, pag. 387-88. Si l'on est assuré de la continuité, dans tout l'intervalle considéré, de la dérivée d'ordre $n-1$, l'existence de la derivée d'ordre n n'est nécessaire qu'à l'interieur de cet intervalle.

Si la fonction $f(x)$ n'eût eu aucun pôle dans l'intervalle (AB) on aurait pu poser $\varphi_n(x) = N_n(x)$. Cette expression correspond à l'expression suivante[1] du terme reste de la formule d'interpolation de Newton

$$R_n(x) = \frac{(x-\beta_0)^{a_0}(x-\beta_1)^{a_1}\dots(x-\beta_p)^{a_p}}{n!} D^n_{x'} f(x'). \quad (19\text{ bis})$$

L'expression (19) est parfois commode; elle a toutefois l'inconvénient de contenir un nombre inconnu x', dont on sait seulement qu'il est compris entre le plus grand et le plus petit des nombres $\beta_0 \dots \beta_n$, x. Mais nous allons indiquer une autre expression qui ne souffre pas de cet inconvénient et qui s'applique aussi aux variables complexes. En cherchant à étendre la formule (19) aux variables complexes on va rencontrer des difficultés, parce que le théorème de Rolle ne reste pas applicable en ce cas.

§ 5. Reprenons donc l'intégrale (1) et soit $\frac{T_n(x)}{N_n(x)}$ encore la $n^{\text{ième}}$ réduite de la fraction continue (15); on a par définition

$$\frac{T_n(\beta_i)}{N_n(\beta_i)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-\beta_i}\,dz \qquad (i = 0, 1, 2, \dots n-1).$$

En posant

$$\psi_{i,n+1}(x) = (x-\beta_i)(x-\beta_{i+1})\dots(x-\beta_{i+n})$$
$$\psi_n(x) = (x-\beta_0)(x-\beta_1)\dots(x-\beta_n)$$

et en exprimant $T_{2n}(x)$ par la formule d'interpolation de Lagrange on trouve en décomposant tous les termes par la formule

$$\frac{x-z}{(z-\beta_i)(x-\beta_i)} = \frac{1}{z-\beta_i} - \frac{1}{x-\beta_i}$$

l'expression suivante

$$T_{2n}(x) =$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{x-z}\,\psi_{i,n+i}(x)\left\{\frac{N_{2n}(z)}{\psi_{i,n+i}(z)} - \frac{N_{2n}(x)}{\psi_{i,n+i}(x)}\right\}dz\,,\ (i = 0, 1, 2, \dots n-1).$$

[1]) J. Tannery l. c. pag. 390; J.-L.-W.-V. Jensen l. c. pag. 247.

Pour le terme reste

$$R_n(x) = f(x) - \frac{T_n(x)}{N_n(x)}$$

on en dérive les expressions suivantes

$$R_{2n}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-x}\,\frac{N_{2n}(z)}{N_{2n}(x)}\,\frac{\psi_{i,n+i}(x)}{\psi_{i,n+i}(z)}\,dz \quad (i = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

Pour $R_{2n+1}(x)$ on trouve $n+1$ expressions semblables. Ces deux systèmes d'équations équivalent à l'équation unique

$$R_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-x}\,\frac{N_n(z)}{N_n(x)}\,\frac{\varphi_n(z)}{\varphi_n(x)}\,\frac{\psi_{n-1}(x)}{\psi_{n-1}(z)}\,dz\,, \tag{20}$$

où $\varphi_n(z)$ est un polynôme arbitraire de z du même degré que $N_n(z)$. Cette formule correspond à l'expression d'Hermite[1].

$$R_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-x}\,\frac{\psi_{n-1}(x)}{\psi_{n-1}(z)}\,dz \tag{20 bis}$$

pour le terme reste de la formule d'interpolation de Newton.

Dans notre démonstration nous avons supposé que les nombres β_i sont tous différents. Mais on voit aisément que l'expression (20) reste valable aussi dans le cas général; il suffit de remarquer que l'intégrale est égale à la somme des résidus — relatifs aux pôles de la fonction sous le signe d'intégration — contenus dans l'intérieur de Γ. Supposons que tous les β_i tendent vers la même limite a et posons $\varphi_n(z) = N_n(z)$, on trouve alors

$$R_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-x}\,\frac{N_n^2(z)}{N_n^2(x)}\,\frac{(x-a)^n}{(z-a)^n}\,dz. \tag{21}$$

Multiplions cette équation par $N_n^2(x)$ et différentions par rapport à a sous le signe d'intégration, on aura

[1]) Crelles Journal. vol. 84, pag. 70.

$$D_a\{R_n(x)\cdot N_n^2(x)\} =$$

$$-\frac{n}{2\pi i}(x-a)^{n-1}\int_\Gamma \frac{f(z)\,N_n^2(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz + \frac{(x-a)^n}{\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)\,N_n(z)}{(z-x)(z-a)^n}\,\frac{\partial N_n(z)}{\partial a}\,dz. \quad (22)$$

Désignons par $r_a^n f(a)$ la fonction vers laquelle tend $\rho^n f(x)$ quand tous les β_i tendent vers a; le premier terme au deuxième membre est alors égal à [1])

$$-(a-x)^{n-1} D_a r_a^{n-1} f(a),$$

quant au deuxième terme on voit en le comparant au (20) qu'il est égal à

$$2N_n(x)\cdot\frac{\partial N_n(x)}{\partial a}\cdot R_n(x).$$

La formule (22) se réduit alors à

$$N_n^2(x)\,D_a R_n(x) = -(a-x)^{n-1} D_a r_a^{n-1} f(a).$$

On en dérive notre dernière expression du terme reste

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{(a-x)^{n-1}}{N_n^2(x)}\,D_a r_a^{n-1} f(a)\cdot da,$$

qui est à rapprocher de l'expression suivante du terme reste de la formule de Taylor

$$R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-a)^{n-1} D_a^n f(a)\cdot da.$$

[1]) Voir N.-E. Nørlund. l. c. pag. 88.